ברצוננו לבחור(לפעמים הסדר חשוב, לפעמים לא) k איברים מתוך A(לפעמים בלי חזרות, לפעמים חזרות מותרות).

# משפט - בחירה עם חזרות כשהסדר חשוב

תהי קבוצה סופית . מספר הדרכים לבחור מתוך A כאשר חזרות מותרות והסדר חשוב הוא

## הוכחה

אוסף הבחירות הנ"ל הוא למעשה הקבוצה . לכן לפי עקרון הכפל .ון הכפל תרות והסדר חשוב הוא:א רותמתכנס

## בעיה שקולה

בכמה דרכים ניתן לסדר כדורים שונים בn תאים שונים כך שתכולת כל תא היא בלתי מוגבלת? תשובה:

## דוגמה

בכמה דרכים ניתן למלא טופס טוטו? תשובה:

# משפט - בחירה בלי חזרות כשהסדר חשוב

*, מספר הדרכים לבחור איברים מתוך A כאשר חזרות אסורות והסדר חשוב הוא*

## הוכחה

מס' הבחירות האפשריות הוא למעשה מספר הסדרות בגודל k של אברי A בלי חזרות: . לפי עקרון הכפל:

## בעיה שקולה

בכמה דרכים ניתן לסדר כדורים שונים בn תאים שונים כך שתכולת כל תא היא לכל היותר 1? תשובה:

## דוגמה

כמה מילים בנות 5 אותיות ניתן לבנות מהא"ב העברי כך שעסור שבמילה אחת תופיע אות יותר מפעם אחת? תשובה:

# הסכם

# משפט – בחירה בלי חזרות כשהסדר לא חשוב

תהי קבוצה סופית . מספר הדרכים לבחור מתוך A כאשר חזרות אסורות והסדר לא חשוב הוא

## הוכחה

לפי משפט קודם מספר הסדרות באורך k של איברי A כאשר חזרות אסורות הוא . תהי כך ש(נשים לב ש). כל X כזו מגדירה סדרות בגודל k(כמס' התמורות של איברי X). לכן =>

## בעיה שקולה

בכמה דרכים ניתן לסדר כדורים זהים בn תאים שונים כך שתכולת כל תא היא לכל היותר כדור אחד? תשובה:

## דוגמה

בכמה דרכים ניתן למלא טופס לוטו(הלוטו הישן)? תשובה:

## דוגמה

בכמה דרכים ניתן לבחור ועד של 5 בנים ו4 בנות מילדי הכיתה, כאשר בכיתה 30 בנים ו20 בנות? תשובה:

# טענה

מספר הסדרות הבנויות מn אפסים וm אחדות הוא:

## הוכחה

על מנת לבנות סדרה כנ"ל נמקם את n האפסים ב המקומות של המילה שלנו, וזאת ב דרכים, ואז נמקם את האחדות וזאת בדרך אחת, ולכן התשובה

### הערה

# משפט – בחירה עם חזרות כשהסדר לא חשוב

תהי קבוצה סופית . מספר הדרכים לבחור מתוך A כאשר חזרות מותרות והסדר לא חשוב הוא

## הוכחה

נסמן . בחירה חוקית ניתן לתאר ע"י ציון מספר הפעמים בהן נבחר כל אחד מאיברי A. נסמן ב את מספר הפעמים שנבחר האיבר נשים לב ש לכל לכן . כל בחירה ניתן לייצג בעזרת n גושים: . נתאר את הבחירה ע"י גושים של 0 שאורכם הכולל הינו k ובין כל 2 גושים יש קו מפריד. נשים לב שמיקומו של גוש מגדיר את האיבר המיוצג ע"י גוש זה ואורכו של גוש מגדיר את מספר הפעמים שהאיבר נבחר. לכן בנינו פונ' חח"ע ועל בין קבוצת הבחירות החוקיות לקבוצת הסדרות באורך הבנויות מk אפסים ו אחדות. מספר סדרות אלו הוא  לפי טענה קודמת.

## בעיה שקולה

בכמה דרכים ניתן לסדר כדורים זהים בn תאים שונים כך שתכולת כל תא לא מוגבלת? תשובה:

## בעיה שקולה נוספת

מצאו את מספר הפתרונות השלמים אי שליליים של המשוואה בשלמים אי שליליים. תשובה:

סיכום

# בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך n(בכמה דרכים ניתן לסדר k כדורים בn תאים שונים)?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | חזרות מותרות(תכולת כל תא לא מוגבלת) - | חזרות אסורות(תכולת כל תא היא לכל היותר כדור אחד) - |
| סדר חשוב(כדורים שונים) |  |  |
| סדר לא חשוב(כדורים זהים) |  |  |

# תרגילים

1. מצאו את מס' הפתרונות בשלמים אי שליליים של המשוואה

תשובה:

1. כנ"ל רק ש

תשובה: דרך אחת – בזבזנו כבר 7 כדורים, נשאר למצוא

דרך אחרת: נגדיר משתנים חדשים :

ולכן התשובה היא

# דוגמה

מצאו את מס' הפתרונות בשלמים אי שליליים של

## תשובה

נוסיף משתנה נוסף שימדוד כמה אנחנו רחוקים מ17, ואז ויש פתרונות למשוואה הזאת. ניצור פונ' חח"ע ועל:

## מקרה כללי

מצאו את מס' הפתרונות בשלמים אי שליליים של

תשובה:

זהויות בסיסיות

הוכחה אלגברית:   
הוכחה קונבינטורית: מספר תתי הקבוצות בגודל k שווה למספר תתי הקבוצות בגודל n-k

נבנה פונקציה כך ש. הפונקציה הפיכה ע"י כך ש

# זהות פסקל:

הוכחה אלגברית: לבד

## הוכחה קומבינטורית

מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך n(בלי חזרות, סדר לא חשוב) הוא . נחשוב על האיבר הראשון. יש לנו 2 אפשרויות לגביו. אפשרות ראשונה – לבחור אותו, ואז מותר לבחור k-1 איברים מתוך n-1, וזאת ניתן לעשות ב דרכים. האפשרות השניה היא לא לבחור אותו, ואז מותר לבחור k איברים מתוך n-1 וזאת ניתן לעשות ב דרכים. לפי עקרון הסכום(שימו לב 2 המקרים זרים)

הבינום של ניוטון

יהיו , אזי (הערה – זה נכון בכל תחום קומוטטיבי)

## דוגמה

כמה דרכים יש לנו לבחור למשל את ? צריך לבחור 3 aים מתוך 5 מקומות כלומר

# הוכחה

נרשום בצורה מפורשת . לאחר פתיחת הסוגריים נקבל מילים מהצורה (). מספר הפעמים שיתקבל הוא כמספר הדרכים לבחור k aים מתוך n הסוגריים, וזאת ניתן לעשות ב דרכים. לכן המקדם של הוא

# דוגמה